矩阵的PLUS分解及其应用

郝鹏威

北京大学信息科学中心

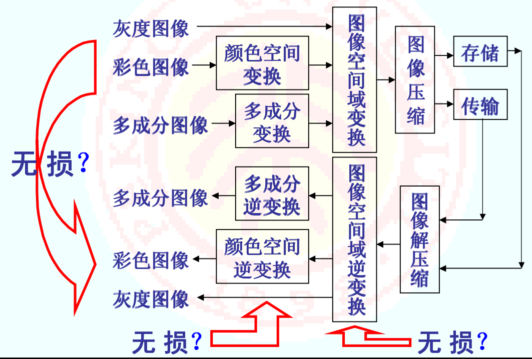
Queen Mary, University of London

报告内容

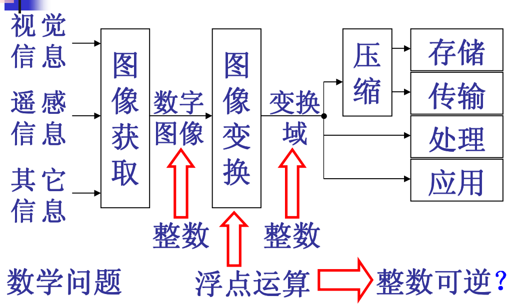
一、背景介绍
二、研究成果
三、应用举例
四、问题公开

一、背景介绍

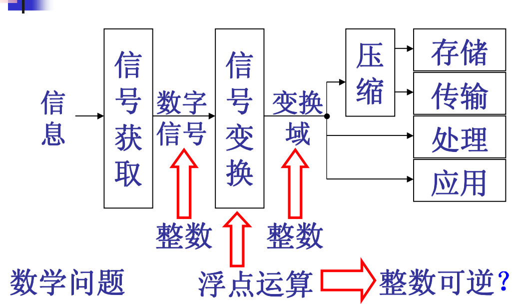
问题来源



问题的模型化



问题的普遍性



什么是整数可逆变换?

- 如果变换使某个定义域的任意整数x变换为整数y，其对应逆变换可以将整数y变换还原为整数x
- 如果逆变换也要求是整数可逆的，整数可逆变换就必须是一一对应的整数映射。

一个简单的例子

一个简单二维变换: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \\ & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

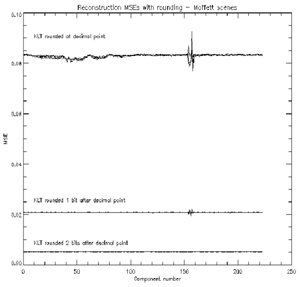
如果直接取整实现变换:

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & \\ & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & \\ & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0.25 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{取整} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

变换结果并不是一对一的，因此不可能整数可逆!

提高精度可以实现吗?

2000年**NASA**为实现无损变换还在研究高维线性变换后取整精度的确定问题



他们的实验发现即使取到小数点后几位都不能保证变换是整数可逆的，而且付出的代价很大 **(1bit/bit)!**

直接可逆整数变换的可能性

通过直接取整实现的整数变换:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{y}} = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}]$$

假设取整误差为:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}]$$

并假设取整是整数独立的: $[n+c] = n + [c]$

则相应的变换矩阵必须满足:

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{b})] = [\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{e} - \boldsymbol{b})] = [\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}] = \boldsymbol{x} + [-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}]$$

即: $[-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}] = \boldsymbol{0}$ 或 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \le 1$

如果逆变换也是整数可逆的，则还需要满足: $\|\boldsymbol{A}\|_\infty \le 1$

因为存在: $\|\boldsymbol{A}\|_\infty \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \ge \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1$

所以必然有: $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 1$

这一条件是很苛刻的。

整数变换研究背景介绍

- 拼凑的小波变换整数实现:
  - **S**变换**(Blume & Fand, 1989)**
  - **TS**变换**(Zandi et al, 1995)**
  - **S+P**变换**(Said & Pearlman, 1996)**
- 梯状结构 **(Bruekers & van den Enden, 1992)**
- 提升方案 (二维，**Sweldens, 1996)**
- 凑的可逆颜色空间变换 **(Gormish et al, 1997)**
- 小波变换的分解 (二维， 石青云，**1998**，**Daubechies et al, 1998)**

高维的线性变换如何实现?

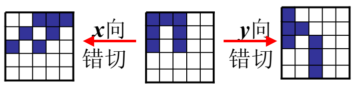
是否可以采用拼凑的方法设计?

没有理论指导是不可能的!

我们的解决办法：矩阵分解

在图形学中的问题

- 错切变换的实现可以在存储器级别进行，可以用一维的存储器复制来实现。



- 图形学中的投影变换用齐次坐标表示时，其变换可以用一个矩阵表示。
- 问题：能否及怎样把投影变换分解为一些错切变换以实现变换加速？

错切分解研究背景介绍

- 二维旋转变换的两个错切-比例分解 **(Catmull & Smith, SIGGRAPH, 1980)**
- 二维旋转变换的三个错切分解**(Paeth ,1986)**
- 三维仿射变换的三个错切-比例分解**(Hanrahan, SIGGRAPH, 1990)**
- 三维旋转变换的三个错切分解**(Wittenbrink & Somani, SIGGRAPH, 1993)**
- 三维投影变换的一个错切和二维变形分解 **(Lacroute & Levoy, SIGGRAPH, 1994)**
- 三维旋转变换的四个错切分解**(Chen & Kaufman, 2000)**

错切分解与整数可逆分解的联系

- 错切变换矩阵实际上等价于一个单位三角矩阵。
- 三维任意投影变换的错切分解问题就是一个单位三角分解问题
- 错切分解与我们用于整数变换的三角分解属于同一数学问题：可定制分解

二、研究成果

单个整数变换可逆的条件

如果任意整数x和y同时满足

$$y=ax+b$$

$$x=(y-b)/a$$

则a，b，$1/a$和b/a都必须是整数

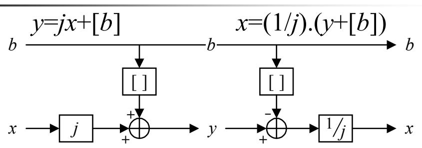
整数的b可以用取整来实现：$[b]$

a和$1/a$则必须是特殊的整数：整数因子

整数因子

- 整数域的单位群
- 整数因子：j
  - 实数：**1，－1**
  - 复数：**1，－1，*i*，－*i***
- 整数可逆变换实现： $y=jx+[b]$
- 性质**1**：整数因子不改变整数的大小
- 性质**2**：整数因子的逆仍然是整数因子

单个整数可逆变换的基本计算结构



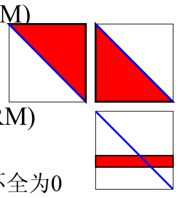
- 整数因子：j
- 取整方法：截尾、四舍五入等等，十分灵活
- 前人方法的广义化：j =1时，该结构与Bruekers & van den Enden的梯状结构和Sweldens的提升结构相同。

线性变换的实现方法

- 与单个整数的变换相同：$y=jx+[b]$
- 对矩阵的要求：
  - 对角线元素应该是整数因子
  - 对于正变换，其它元素的计算必须完全包括在b内，而且必须完全独立于x
  - 对于逆变换，其它元素的计算必须完全包括在b内，而且必须完全独立于y
- 基本可逆矩阵（ERM）

变换直接整数可逆的矩阵形式

- 对角元素都是整数因子的基本可逆矩阵
- 三角基本可逆矩阵 (TERM)
  - 上三角基本可逆矩阵
  - 下三角基本可逆矩阵
- 单行基本可逆矩阵 (SERM)
  - $\boldsymbol{S}_m = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{s}_m^T$
  - 只有一行非对角线元素不全为0
- 其它仅通过行列置换就可以转化为三角基本可逆矩阵的矩阵



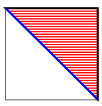
TERM的性质

- 两个上**TERM**的积还是一个上**TERM**
- 两个下**TERM**的积还是一个下**TERM**
- **TERM**的逆还是一个**TERM**
- **TERM**的行列式值是一个整数因子

TERM的计算

- 上**TERM**计算： $m = 1,2,3,\cdots,N-1$

$$\begin{cases} y_m = j_m x_m + \left[\sum_{n=m+1}^{N} a_{mn} x_n\right] = j_m x_m + [b_m] \\ y_N = j_N x_N \end{cases}$$



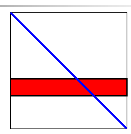
- 上**TERM**逆变换：

$$\begin{cases} x_N = y_N / j_N \\ x_m = (1/j_m)\cdot\left(y_m - \left[\sum_{n=m+1}^{N} a_{mn} x_n\right]\right) = (1/j_m)\cdot(y_m - [b_m]) \end{cases}$$

- 下**TERM**类似，只是计算次序不同

单行基本可逆矩阵（SERM）

- $\boldsymbol{S}_m = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{s}_m^T$



- 性质：
  - 两个同一行的**SERM**积还是一个**SERM**
  - **SERM**的逆还是一个**SERM**
  - **SERM**的行列式值是一个整数因子

两种特殊矩阵的分解

- 旋转变换：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ (1-\cos\theta)/\sin\theta & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sin\theta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ (1-\cos\theta)/\sin\theta & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & (\cos\theta-1)/\sin\theta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \sin\theta & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & (\cos\theta-1)/\sin\theta\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 比例变换：

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1/\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/\alpha-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1/\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/\alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \alpha-1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1/\alpha-1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

一般矩阵如何分解

- 对任意可逆矩阵都存在**LDU**分解：***A=PLDU***
- 问题：置换矩阵***P***，单位三角矩阵***L***和***U***都可以实现整数可逆变换，如何处理***D***？

$$\lambda_m = d_1 d_2 \cdots d_m \qquad \boldsymbol{D}_R = diag(1,\cdots,1,\lambda_N)$$

$$\boldsymbol{D} = diag(d_1,d_2,\cdots,d_N) = \boldsymbol{D}_O\cdot\boldsymbol{D}_E\cdot\boldsymbol{D}_R = \boldsymbol{D}_E\cdot\boldsymbol{D}_O\cdot\boldsymbol{D}_R$$

$$\boldsymbol{D}_O = \begin{cases} diag(\lambda_1,1/\lambda_1,\lambda_3,1/\lambda_3,\cdots,\lambda_{N-1},1/\lambda_{N-1}) & \text{if } N \text{ is even}\\ diag(\lambda_1,1/\lambda_1,\lambda_3,1/\lambda_3,\cdots,\lambda_{N-2},1/\lambda_{N-2},1) & \text{if } N \text{ is odd}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{D}_E = \begin{cases} diag(1,\lambda_2,1/\lambda_2,\lambda_4,1/\lambda_4,\cdots,\lambda_{N-2},1/\lambda_{N-2},1) & \text{if } N \text{ is even}\\ diag(1,\lambda_2,1/\lambda_2,\lambda_4,1/\lambda_4,\cdots,\lambda_{N-1},1/\lambda_{N-1}) & \text{if } N \text{ is odd}\end{cases}$$

- 分解为**7**个**TERM** $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PLV}_{O1}\boldsymbol{V}_{O2}\boldsymbol{V}_{O3}\boldsymbol{V}_{O4}\boldsymbol{V}_{E1}\boldsymbol{V}_{E2}\boldsymbol{V}_{E3}\boldsymbol{V}_{E4}\boldsymbol{D}_R\boldsymbol{U}$
$= \boldsymbol{PV}_1\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_3\boldsymbol{V}_4\boldsymbol{V}_5\boldsymbol{V}_6\boldsymbol{V}_7\boldsymbol{D}_R$

分解矩阵的个数最少是几个?

- 我们证明：最多可以不超过**3**个**TERM**的分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PLUS}_0\boldsymbol{D}_R$$

的充要条件是

$$\det \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{D}_R \neq 0$$

其中

$$\boldsymbol{D}_R = Diag(1,1,\cdots\cdots,1,\det(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}))$$

$$\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{e}_N\boldsymbol{s}_0^T = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{e}_N\cdot[s_1,s_2,\cdots,s_{N-1},0]$$

证明概要

引理：矩阵***A***存在单位三角分解***A=LU***的充要条件是***A***的所有顺序主子式都为**1**。

证明**PLUSD**存在的条件是矩阵可逆： 假设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_N]$

$$\boldsymbol{AS}_0^{-1} = [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_N]\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_N\boldsymbol{s}_0^T) = [\boldsymbol{a}_1-s_1\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_2-s_2\boldsymbol{a}_N,\cdots,\boldsymbol{a}_{N-1}-s_{N-1}\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_N]$$

$$\det\left(\boldsymbol{AS}_0^{-1}\right)_k = \det[\boldsymbol{a}_1-s_1\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_2-s_2\boldsymbol{a}_N,\cdots,\boldsymbol{a}_k-s_k\boldsymbol{a}_N]_k$$

$$= \det[\boldsymbol{a}_1-s_1\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_2-s_2\boldsymbol{a}_N,\cdots,\boldsymbol{a}_k]_k - s_k\det[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1},\boldsymbol{a}_N]_k$$

存在***P***使 $\det\left(\boldsymbol{P}^T\cdot[\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1}]\right)_k \neq 0$ 或 $\det\left(\boldsymbol{P}^T[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1},\boldsymbol{a}_N]\right)_k \neq 0$

从而保证 $s_k(k=1,2,3,\cdots,N-1)$都存在：

SERM分解

存在等式：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})\cdot\det(\boldsymbol{A}_{11})$$

因此，利用**TERM**分解***A=PLUS***$_0$就有：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PS}_N\boldsymbol{S}_{N-1}\cdots\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{LU} &= (\boldsymbol{LUS}_1^{-1})\boldsymbol{S}_1\\ &= (\boldsymbol{LUS}_1^{-1}\boldsymbol{S}_2^{-1})\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1\\ &= \dots\\ &= (\boldsymbol{LUS}_1^{-1}\boldsymbol{S}_2^{-1}\dots\boldsymbol{S}_{N-1}^{-1})\boldsymbol{S}_{N-1}\dots\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1\end{aligned}$$

可以分解为基本可逆矩阵的充要条件

矩阵行列式值的绝对值为**1.**

比直接取整变换可逆的条件要宽松得多

如果矩阵行列式值的绝对值不为1

只要矩阵可逆，可对原变换矩阵进行修正：

乘一对角阵或一非零常数。

矩阵修正还可以使：

- 分解的基本可逆矩阵数目最少
- 变换域的动态范围得到控制
- 变换的计算效率提高
- ……

基本可逆矩阵分解算法

1. 分解为三个三角基本可逆矩阵（**TERM**分解）：
   类似于普通三角分解的计算方法
2. 进一步分解为单行基本可逆矩阵（**SERM**分解）：
   从变换矩阵中逐行提取

例：
$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

计算复杂度比较

Implementation	Addition	Multiplication	Rounding	Permutation
Original Transform	N^2-N	N^2	N	No
TERM factorization	N^2-1	N^2-1	$2N-1$	Needed
SERM factorization	N^2-1	N^2-1	$N+1$	Needed

采用分解后基本可逆矩阵变换的总计算复杂度与原变换的计算复杂度相近，不增加。

TERM分解的误差

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PLUS}_0$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_3)) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_3)$$

$$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_3)| \le \boldsymbol{P}(|\boldsymbol{u}_1| + |\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_2| + |\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_3|)$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_\infty \le u\cdot(1 + \|\boldsymbol{L}\|_\infty + \|\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_N\|_\infty)$$

基本可逆矩阵分解的一些特点

- 分解不唯一
- 实矩阵的分解还是实的
- 三角基本可逆矩阵分解数目不大于**3**
- ***NxN***矩阵的单行基本可逆矩阵分解数目不大于***N*+1**
- 误差上界只与变换矩阵的分解有关

基本可逆矩阵分解的优点

- 性能保持：原线性变换非常好的近似
- 整数可逆：变换无损
- 取整方式灵活：截尾，四舍五入，或其它
- 原位计算：加法赋值（ **+=** ）
- 逆变换简单：减法赋值（ **-=** ）
- 计算复杂度：加法和乘法次数为 N^2-1

更一般的三角分解

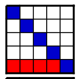
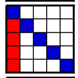
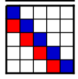
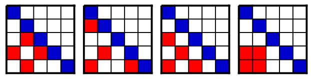
- **A**为一般可逆矩阵
- **P**用一个三角矩阵代替➔伪置换矩阵
- **U**的对角线元素任意➔用户可自由给定
- **S**的形式多种多样➔用户可自由选择

PLUS分解：***A=PLUS***

可定制三角分解

customizable triangular factorization

特殊矩阵S的形式

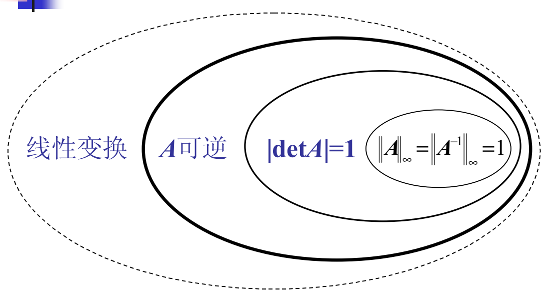
- 单行基本可逆矩阵 
- 单列基本可逆矩阵 
- 单位双对角矩阵 
- 其他**……?** 

分块矩阵的分解

- 分块矩阵分解是元素矩阵分解的推广
- 为实现并行和高效的计算
- 难点：分块矩阵中有的块可能并不可逆
- 问题：如何分块？如何置换？怎样分解的计算效率更高？
- 解决办法：定义行列式矩阵函数

BLUS分解**(**佘轶原**)**

已经解决的矩阵分解问题的范围



发表相关论文

几篇重要的期刊论文：

郝鹏威、石青云：**"**可逆线性变换的整数实现**"**，中国科学（**E**辑），**2000**年，第**30**卷，第**2**期，**132-141**页。

郝鹏威、石青云：**"Matrix Factorization for Reversible Integer Mapping"**, ***IEEE Transactions on Signal Processing***, **V49, N10, 2314-2324, Oct. 2001.**

佘轶原、郝鹏威：**"**均匀分块矩阵的分块**TERM**分解**"**，中国科学（**E**辑），已接受

郝鹏威：**"Customizable Triangular Factorizations of Matrices"**, ***Linear Algebra and Its Applications***, 已接受

新的图像压缩国际标准**JPEG 2000**建议书：

郝鹏威、石青云：**"Proposal of Reversible Integer Implementation for Multiple Component Transforms"**, ***ISO/IEC JTC1/SC29/WG1N 1720***, **Arles, France, July 2000.**（此建议已被采纳并进入国际标准的最终文本）

JPEG 2000

Part	Title	CFP	WD	CD	FCD	FDIS	IS
1	JPEG 2000 Image Coding System: Core Coding System	97/03	99/03	99/12	00/03	00/10	00/12
2	JPEG 2000 Image Coding System: Extensions	**97/03**	00/03	00/08	00/12	**01/07**	**01/10**
3	Motion JPEG 2000	99/12	00/07	00/12	01/03	01/07	01/10
4	Conformance Testing	99/12	00/07	00/12	01/07	02/02	02/05
5	Reference Software	99/12	00/03	00/07	00/12	01/08	01/11
6	Compound Image File Format	97/03	00/12	01/03	01/11	02/03	02/05

- **CFP: Call for Proposals**
- **WD: Working Draft**
- **CD: Committee Draft**
- **FCD: Final Committee Draft**
- **FDIS: Final Draft International Standard**
- **IS: International Standard**

总结

- 线性变换整数可逆实现的理论在国际一流期刊上发表及其受欢迎的程度，说明我们在基础理论上是站在国际前沿的。
- 该理论应用在多成分变换整数可逆实现中的技术被新的图像压缩国际标准**JPEG 2000**采纳，说明其应用价值得到了国际的认可。
- 新的矩阵分解框架（**PLUS**分解）的提出对线性代数的发展和更多的应用有帮助。

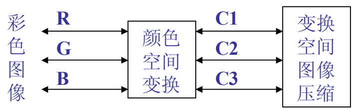
三、应用举例

可逆整数变换在图像压缩中的应用

- 数据或信号的无损压缩
- 统一的有损和无损压缩系统
- 从有损到无损的累进传输或解压缩
- 感兴趣区域无损解码的有损压缩
- …………

变换的整数可逆实现使得无损压缩与有损压缩方法完全兼容，使原有损压缩方法得以重用。

例 1：彩色图像压缩



$$\begin{bmatrix} Y \\ Cr \\ Cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.500 & -0.419 & -0.081 \\ -0.169 & -0.331 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

颜色空间变换是否整数可逆成为可否实现无损变换编码的关键。

例 1：颜色空间变换（J2K）

JPEG2000 非整数可逆变换

$$\begin{bmatrix} Y \\ Cr \\ Cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.500 & -0.419 & -0.081 \\ -0.169 & -0.331 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

JPEG2000 整数可逆变换

$$\begin{cases} Y = \lfloor (R + 2G + B)/4 \rfloor \\ Cr = R - G \end{cases} \qquad \begin{cases} G = Y - \lfloor (Cr + Cb)/4 \rfloor \\ R = Cr + G \end{cases}$$

- 采用的是近似的无损变换
- 有损压缩和无损压缩采用不同的方法

例 1：颜色空间变换

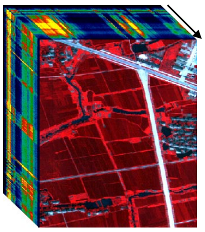
我们的矩阵分解方法：

$$\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_R = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ b_1 & 1 & b_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ d_1 & d_2 & k \end{bmatrix}$$

$$k = \det \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_R = \pm 1$$

用于所有可逆线性颜色空间变换的整数可逆实现，从而比较各种变换之间的整数可逆实现的优劣。

例 2： 多成分变换



多成分图像数据

多成分之间去相关变换：

- 离散小波变换 (DWT)
- TM图像的缨帽变换
- 主成分分析变换(KL变换)
- 离散余弦变换（DCT）
- ……

变换域的JPEG 2000压缩

例 2： 多成分图像压缩

前人的方法：

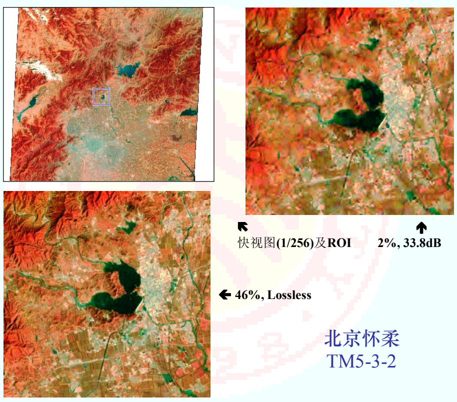
- 有损压缩和无损压缩采用不同的方法
- 一定精度的有损变换与误差的无损编码相结合

多成分变换矩阵有可能是十分巨大的，采用拼凑方法来设计一个近似的整数可逆实现是不可能的！

我们的解决方案（JPEG 2000的1720号提案）：

用矩阵分解实现多成分变换的整数可逆（包括KLT）

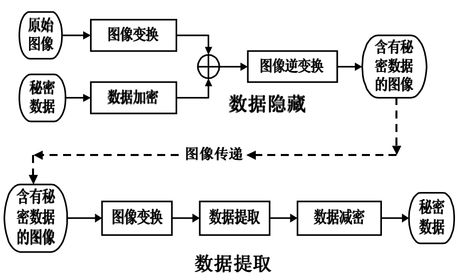
例3:基于感兴趣区域图像压缩



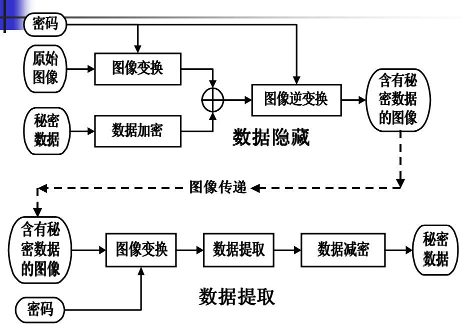
可逆整数变换在信息安全中的应用

- 带有密码的变换：变换具一些有良好的性质（如正交），同时又含有密码
- 隐蔽通信：把秘密数据隐藏在一个本身有含义的信号中实现的通信
- 数字水印：用于保护版权、及来源认定

例 4： 采用不带密码的变换



例 4： 采用带密码的变换

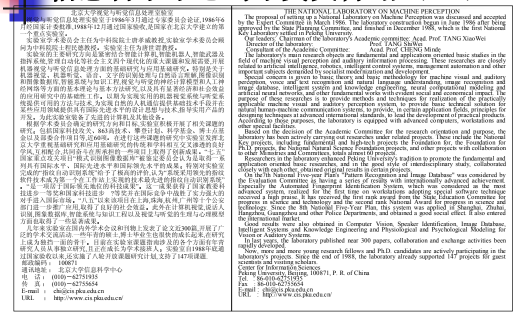


例 5： 数据隐藏
实现大数据量隐藏：70K字节

原始图像(512x512)

PSNR = 36.37dB

例 5： 隐藏数据
信息科学中心的中英文介绍（7K）



北京大学视觉与听觉信息处理室验室

视觉与听觉信息处理实验室于1986年3月通过专家委员会论证,1986年6月经国家计委批准,1988年12月通过国家验收,是国家在北京大学建立的第一个重点实验室。

实验室学术委员会主任为中科院院士唐孝威教授,实验室学术委员会顾问为中科院院士程民德教授。实验室主任为唐世谓教授。

实验室的主要研究方向是紧密结合智能计算机,智能机器人,智能武器及指挥系统,管理自动化等社会主义四个现代化的重大课题和发展需要,开展机器视觉与听觉信息处理方面的基础研究与应用基础研究。特别是关于机器视觉、机器听觉、语音、文字的识别处理与自然语言理解,图像识别和图像数据库,智能系统与知识工程,视觉与听觉的神经计算模型和人工神经网络等方面的基本理论与基本方法研究,以及具有显著经济和社会效益的应用研究中的基础性工作。以期为实现实用的机器视觉系统与听觉系统提供可用的方法与技术,为实现自然的人机通信提供基础技术手段并在某些应用领域提供具有国际先进水平的设计思想与技术,指导实用产品的开发。为此实验室装备了先进的计算机及其他设备。

根据学术委员会确定的研究方向和目标,实验室积极开展了相关课题的研究。包括国家科技攻关、863高技术、攀登计划、科学基金、博士点基金以及部委合作项目等,近60项。在进行这些课题的研究中实验室发挥北京大学重视基础研究和应用基础研究的传统和学科相互交叉渗透的良好学风,互相配合,共同奋斗在所承担的一些项目上取得了创新成果。"七.五"国家重点攻关项目"模式识别图像数据库"被鉴定委员会认为是取得一系列具有国际水平、国际先进水平和国际领先水平的成果。特别对实验室完成的"指纹自动识别系统"给予了极高的评价,认为"系统采用领先的指纹软件技术成为第一个在工作站上实现的技术最先进的指纹自动识别系统"。"是一项居于国际领先地位的科技成果"。这一成果获得了国家教委科技进步一等奖和国家科技进步 ?等奖并在国际竞争中战胜了实力强大的对手进入国际市场。"八五"以来该项目在上海,珠海,杭州,广州等十个公安部门进一步推广应用,取得了良好的社会效益。此外在计算机视觉,说话人识别,图象数据库,智能系统与知识工程以及视觉与听觉的生理与心理模型方面也取得了一些显著成果。

几年来实验室在国内外学术会议和刊物上发表了论文近300篇,开展了广泛的学术交流活动.一些年青的硕士,博士毕业生也很快的成长起来,在研究上成为独挡一面的骨干。目前在实验室课题指南涉及的各个方面有年青研究人员从事独立研究,且正在成长为学术接班人。实验室自1988年底通过国家验收以来,还实施了八轮开放课题研究计划,支持了147项课题.

邮政编码： 100871
通讯地址： 北京大学信息科学中心
电　话： (010)－62751935
传　真： (010)－62755654
E-mail ： chi@cis.pku.edu.cn
URL ： http://www.cis.pku.edu.cn/

THE NATIONAL LABORATORY ON MACHINE PERCEPTION

The proposal of setting up a National Laboratory on Machine Perception was discussed and accepted by the Expert Committee in March 1986. The laboratory construction begun in June 1986 after being approved by the State Planning Committee, and finished in December 1988, which is the first National Key Laboratory settled in Peking University.

Our leaders: Chairman of the laboratory's Academic committee: Acad. Prof. TANG XiaoWei
Director of the laboratory: Prof. TANG ShiWei
Consultant of the Academic Committee: Acad. Prof. CHENG Minde

The laboratory's main research objects are fundamental and applications oriented basic studies in the field of machine visual perception and auditory information processing. These researches are closely related to artificial intelligence, robotics, intelligent control systems, management automation and other important subjects demanded by socialist modernization and development.

Special concern is given to basic theory and basic methodology for machine visual and auditory perception, voice and text recognition and natural language understanding, image recognition and image database, intelligent system and knowledge engineering, neural computational modeling and artificial neural networks, and other fundamental works with evident social and economical impact. The purpose of these researches is to provide methods and techniques for realization of the practically applicable machine visual and auditory perception system, to provide basic technical solution for natural human-machine communication systems, to provide, in certain application fields, principles for designing techniques at advanced international standards, to lead the development of practical products. According to those purposes, the laboratory is equipped with advanced computers, workstations and other special facilities.

Based on the decision of the Academic Committee for the research orientation and purpose, the laboratory has been actively carrying out researches under related projects. These include the National Key projects, including fundamental and high-tech projects the Foundation for, the Foundation for Ph.D. projects, the National Natural Science Foundation projects, and other projects with collaboration to other Ministries and Committees, totals almost 60 projects.

Researchers in the laboratory enhanced Peking University's tradition to promote the fundamental and application oriented basic researches, and in the good style of interdisciplinary study, collaborated closely with each other, obtained original results in certain projects.

On the7th National Five-year Plan's "Pattern Recognition and Image Database" was considered by the Evaluation Committee as having a series of results with internationally advanced achievement. Especially the Automated Fingerprint Identification System, which was considered as the most advanced system, realized for the first time on workstations adopting special software technique received a high praise. It has received the first rank award from the State Education Committee for progress in science and technology and the second rank National Award for progress in science and technology. Since the 8th National Five-Year Plan, this system was applied in Shanghai, Zhuhai, Hangzhou, Guangzhou and other Police Departments, and obtained a good social effect. It also entered the international market.

Good results were also obtained in Computer Vision, Speaker Identification, Image Database, Intelligent Systems and Knowledge Engineering and Physiological and Psychological Modeling for Vision or Auditory Systems.

In last years, the laboratory published near 300 papers, collaboration and exchange activities been rapidly developed.

Now, more and more young research fellows and Ph.D. candidates are actively participating in the laboratory's projects. Since the end of 1988, the laboratory already supported 147 projects for guest scientists and visiting scholars.

Center for Information Sciences
Peking University, Beijing, 100871, P. R. of China
Tel. : 86-010-62751935
Fax : 86-010-62755654
E-mail : chi@cis.pku.edu.cn
URL : http://www.cis.pku.edu.cn/

例 6： 数字水印

添加水印后的图像
(PSNR=33.92dB)

数字水印
北京大学信息科学中心
电话：(010)62752461
传真：(010)62755654
URL：http://www.cis.pku.edu.cn/
(R) All rights reserved, 1999年3月
★ 版权所有！！

数字水印应该能经受一般的图像处理、压缩、变形、切割

PLUS分解在图形学中的应用

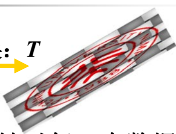
把图形学中的几何变换（仿射变换、投影变换）分解为一些错切变换（二维3-4个，三维4-5个）以实现变换的加速。

- 图像的显示、变换
- 体数据的绘制
- 图像或体数据的匹配或拼接

例 7： 体数据（图像）变换

原始图像

变换：T



比例旋转结果

- 直接变换就必须针对每一个数据点计算其变换后的新位置
- 某些点还不得不通过插值得到
- 变换过程一般需要额外的数据空间
- 变换后的数据一般不可逆恢复

例 7： 体数据（图像）变换加速

变换分解：$T = S_x S_y S_x$ 　 $S_x = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 　 $S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$

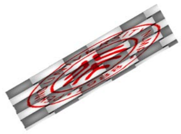
原始图像

x向错切

陈颖的工作

y向错切

x向错切



比例旋转结果

例 8： 体数据（图像）匹配加速

- 以一幅图像为基准对另一幅图像频繁迭代使用几何变换（仿射变换）以寻找最佳匹配方向和位置。

应用PLUS分解的优势

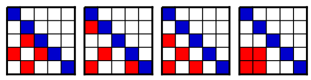
- 变换针对每一行/列/层数据点计算其变换后的新位置（加速至少O(N)倍）
- 不用插值就可以得到所有点
- 变换过程一般无需额外的数据空间
- 变换后的数据可以完全无损恢复

四、问题公开

1. PLUS分解中S的一般形式

我们对PLUS分解中的特殊矩阵S只证明了几种形式下的充要条件，只发现了两个必要条件和一个充分条件

但特殊矩阵S 的一般形式到底要满足什么样的充要条件PLUS分解才存在？



2. 误差最小的PLUS分解

既然PLUS分解不唯一，而且取整误差的上界只与变换矩阵的分解有关

$$|u| = |P(u_1 + Lu_2 + LUu_3)| \le P(|u_1| + |Lu_2| + |LUu_3|)$$

那么，取整误差最小的分解是什么？如何得到？矩阵分解中用什么规则去选主元？

3. PLUS分解的稳定性

当矩阵阶数太大时，PLUS分解就会出现不稳定的情形，L、U和S的一些元素值会突然增大。

PLUS分解出现不稳定的原因是什么？稳定和不稳定的边界条件是什么？如何使PLUS分解保持稳定？

4. PLUS分解的扰动分析

$$A=PLUS$$
$$\Downarrow$$
$$A+\mathrm{d}A = P(L+\mathrm{d}L)(U+\mathrm{d}U)(S+\mathrm{d}S)$$

数据扰动对PLUS分解的影响有多大？
什么样的矩阵对扰动影响小？
分解前减小扰动的方法是什么？
分解过程中抵抗扰动的方法是什么？

5. PLUS分解的其它应用

随着对我们的矩阵PLUS分解理论的掌握和普及，我们坚信：新的应用领域一定会被不断发现，我们的理论成果必将会在更多的应用领域发挥更大的作用。

谢谢

phao@cis.pku.edu.cn
phao@dcs.qmul.ac.uk
http://www.dcs.qmul.ac.uk/~phao